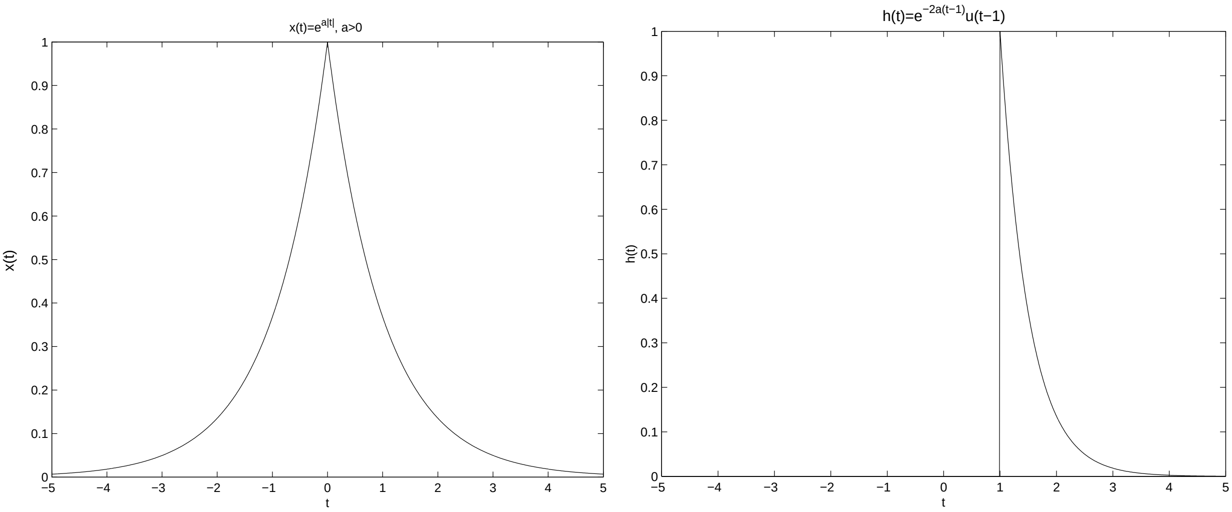
Λυμένες Ασκήσεις



Σχήμα 1: Το σήμα $x(t) = e^{-a|t|}, a > 0$, και το σήμα $h(t) = e^{-2a(t-1)}u(t-1), a > 0$.

Πρώτη Άσκηση

Δίνονται τα σήματα:

$$x(t) = e^{-a|t|}, \tag{1}$$

$$h(t) = e^{-2a(t-1)}u(t-1) \tag{2}$$

όπου $a > 0$ και $u(t)$ είναι το σήμα μοναδιαίου βήματος.

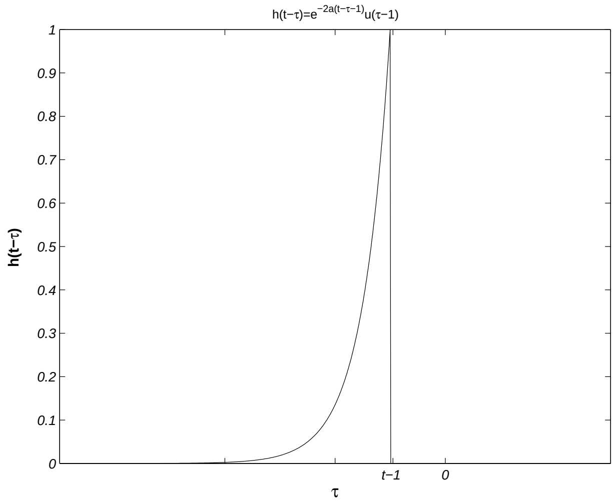
1. Να υπολογίσετε τη συνέλιξη $y(t) = x(t) * h(t)$ με αναλυτικό τρόπο.

2. Να προσεγγίσετε τη συνέλιξη χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση conv του Matlab.

Λύση

1. Η γραφική παράσταση των δύο σημάτων $x(t)$ και $h(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 1. Η συνέλιξη των δυο σημάτων ορίζεται ως εξής:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$



Σχήμα 2: Το σήμα $h(t-\tau) = e^{-2a(t-\tau-1)}u(t-\tau-1), a > 0$ για $t \leq 1$.

Για να την υπολογίσουμε γραφικά, θα πρέπει να σχεδιάσουμε το σήμα $h(t-\tau)$, και να πάρουμε περιπτώσεις ανάλογα με την επικάλυψη των μη μηδενικών συνιστωσών των $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$. Το $h(t-\tau)$ σχεδιάζεται στο Σχήμα 2, για $t \leq 1$, και στο Σχήμα 3, για $t > 1$.

Από τα Σχήματα 1, 2 και 3, είναι φανερό ότι έχουμε δύο περιπτώσεις:

(α′) $t - 1 \leq 0 \Rightarrow t \leq 1$:

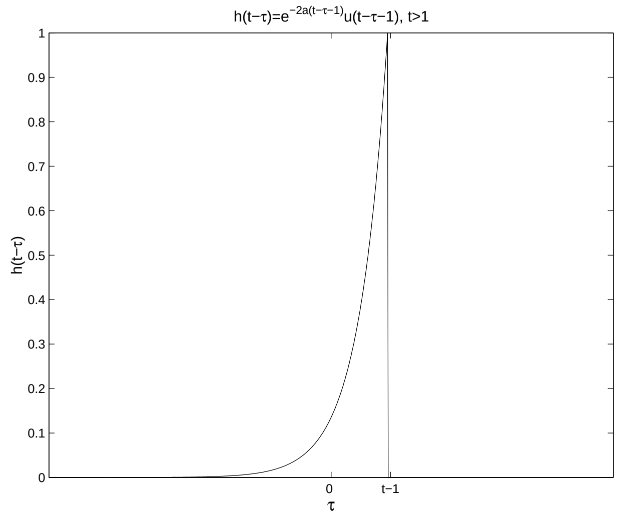
Η συνέλιξη σε αυτήν την περίπτωση θα είναι:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{t-1} e^{a\tau} e^{-2a(t-\tau-1)} d\tau \\ &= e^{-2a(t-1)} \int_{-\infty}^{t-1} e^{3a\tau} d\tau = \frac{1}{3a} e^{a(t-1)} \end{aligned} \tag{3}$$

(β′) $t - 1 > 0 \Rightarrow t > 1$:

Η συνέλιξη σε αυτήν την περίπτωση θα είναι:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{0} e^{a\tau} e^{-2a(t-\tau-1)} d\tau + \int_{0}^{t-1} e^{-a\tau} e^{-2a(t-\tau-1)} d\tau \\ &= \frac{1}{3a} e^{-2a(t-1)} + \frac{1}{a} e^{-a(t-1)} - \frac{1}{a} e^{-2a(t-1)} \\ &= \frac{1}{a} e^{-a(t-1)} - \frac{2}{3a} e^{-2a(t-1)} \end{aligned} \tag{4}$$



Σχήμα 3: Το σήμα $h(t-\tau) = e^{-2a(t-\tau-1)}u(t-\tau-1), a > 0$ για $t > 1$.

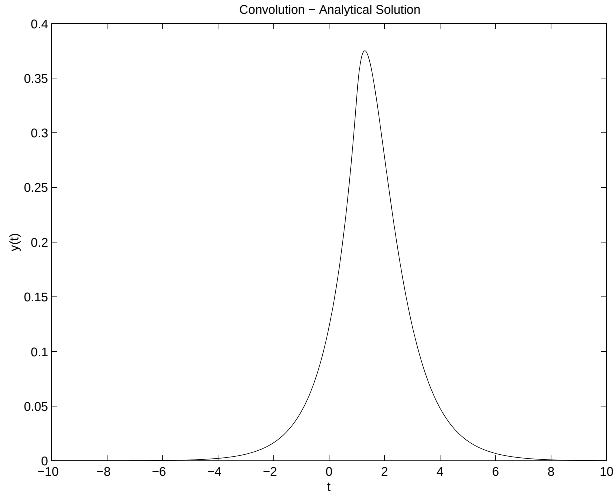
Οπότε, τελικά, έχουμε:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{3a}e^{a(t-1)} & t \leq 1 \\ \frac{1}{a}e^{-a(t-1)} - \frac{2}{3a}e^{-2a(t-1)} & t > 1 \end{cases} \tag{5}$$

το οποίο σχεδιάζεται στο Σχήμα 4.

2. Ένας τρόπος για να προσεγγίσουμε τη συνέλιξη συνεχούς χρόνου είναι να πάρουμε δείγματα των συναρτήσεων $x(t)$ και $h(t)$ και να υπολογίσουμε την συνέλιξη των ακολουθιών που προκύπτουν, μέσω της συνάρτησης conv του MATLAB. Αν τα δείγματα απέχουν χρονικά κατά $\Delta\tau$, με $\Delta\tau$ μικρό, τότε, κανονικοποιώντας τη συνέλιξη των ακολουθιών με τον όρο $\Delta\tau$, προσεγγίζουμε ικανοποιητικά τη συνέλιξη συνεχούς χρόνου.

   Το m-file του Matlab που υλοποιεί την προσέγγιση βρίσκεται στην ιστοσελίδα του μαθήματος με όνομα askisi_SS1.m (μελετείστε την ακρίβεια της προσέγγισης όταν μεταβάλλεται η ποσότητα step).



Σχήμα 4: Το σήμα $y(t)$ που προκύπτει από την συνέλιξη των σημάτων $x(t)$ και $h(t)$